Intégrales de Riemann—Liouville et potentiels.

Par MARCEL RIESZ à Lund.

Introduction.

La définition de l'intégrale de RIEMANN—LIOUVILLE peut s'étendre de beaucoup de manières à l'espace à plusieurs dimensions. On peut en particulier considérer certains procédés d'intégration de caractère elliptique, hyperbolique et parabolique respectivement. Dans tous ces procédés l'intégrale d'ordre deux joue un rôle particulier, elle constitue l'inverse des opérations qui figurent respectivement dans l'équation de LAPLACE, celle des ondes et celle de la chaleur. Nous nous sommes occupé en particulier des deux premiers procédés et nous avons l'intention de rassembler nos recherches dans un mémoire élaboré. En attendant, nous donnons dans le présent travail un résumé assez détaillé de nos résultats concernant l'intégration elliptique et les potentiels[1]) qui y correspondent. En ce qui concerne l'intégration hyperbolique, une conférence faite récemment[2]) à Paris à la Réunion de la *Société Mathématique de France* sur ce procédé et son application au probléme de CAUCHY pour l'équation des ondes va paraître dans le *Bulletin* de la Société.

Les recherches indiquées dans le Chapitre I (et la plus grande partie de celles concernant l'intégration hyperbolique) datent de mars—avril 1933, tandis que celles concernant les masses et la fonction de GREEN et leurs applications ne furent commen-

[1]) Ces potentiels sont considérés depuis longtemps en Analyse et en Physique mathématique.

[2]) Le 9 juillet 1937.

cées qu'en novembre 1935 et terminées en mai 1936.[3]) Nos recherches embrassent aussi le cas newtonien. La fonction de GREEN est toujours considérée comme potentiel défini dans l'espace entier. Dans les chapitres VIII et IX il est aussi question des rapports entre le problème de DIRICHLET (généralisé) de la théorie classique et le potentiel newtonien.

Nous venons de dire que nous donnons ici un résumé assez détaillé. Bien entendu, nous avons omis beaucoup de démonstrations, les unes parce qu'elles sont très simples, les autres parce qu'elles sont trop longues. En ce qui concerne les dernières, nous avons tâché d'en faire ressortir les points essentiels.

Chapitre I. — Les intégrales de Riemann—Liouville.

1. L'intégrale de R.—L.

$$I^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t)\,(x-t)^{\alpha-1}\,dt; \qquad \alpha > 0, \tag{1}$$

satisfait aux relations fondamentales

$$I^{\alpha}\,(I^{\beta} f(x)) = I^{\alpha+\beta} f(x) \tag{2}$$

et

$$\frac{d}{dx} I^{\alpha+1} f(x) = I^{\alpha} f(x). \tag{3}$$

En tout point de continuité de $f(x)$ l'intégrale peut se définir pour l'indice $\alpha = 0$ par un passage à la limite; on obtient alors $I^0 f(x) = f(x)$. Dans des conditions de dérivabilité appropriées on peut définir cette intégrale, comme l'a montré M. HADAMARD, aussi pour des indices négatifs non entiers en retranchant de l'intégrale divergente certaines parties infinies d'ordre fractionnaire. On arrive ainsi à la notion importante de la partie finie des intégrales. On peut atteindre le même but, et cela aussi pour l'indice zéro et les indices entiers négatifs par une méthode qui nous semble très naturelle, celle du prolongement analytique par rapport à l'indice α. Ce prolongement peut s'effectuer p. ex. au moyen de la formule obtenue par un certain nombre d'intégrations par parties

[3]) Deux aperçus succincts de ces procédés d'intégration et de leurs applications viennent de paraître dans les *Comptes rendus du Congrès International des Mathématiciens, Oslo,* 1936, t. II.

$$(4)\qquad I^{\alpha}f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(\alpha+k+1)}(x-a)^{k}+I^{\alpha+n}f^{(n)}(x).$$

La dernière expression s'écrit

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+n)}\int_{a}^{x}f^{(n)}(t)\,(x-t)^{\alpha+n-1},$$

l'intégrale étant convergente pour $\alpha>-n$. Le prolongement analytique se trouve donc effectué pour tous ces indices. On trouve en particulier $I^{-k}f(x)=f^{(k)}(x)$. La présence du facteur $1/\Gamma(\alpha)$ devant l'intégrale est essentielle pour la validité de la dernière relation.

2. La généralisation de l'intégrale de R.—L. dont il sera question ici se rapporte à un espace Ω_m ou plus brièvement Ω à un nombre quelconque $m\geqq 1$ de dimensions. La distance (euclidienne) de deux points P et Q sera désignée par $r_{PQ}=r_{QP}$. Nous posons pour α positif

$$(5)\qquad I^{\alpha}f(P)=\frac{1}{H_m(\alpha)}\int_{\Omega}f(Q)\,r_{PQ}^{\alpha-m}\,dQ,$$

avec

$$(6)\qquad H_m(\alpha)=\frac{\pi^{\frac{m}{2}}2^{\alpha}\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m-\alpha}{2}\right)},$$

l'intégration s'étendant à l'espace entier et dQ désignant l'élément de volume de cet espace. Quant à la fonction f, nous supposons seulement que toutes les intégrales où elle intervient sont absolument convergentes. On a alors les formules fondamentales, où Δ désigne l'opérateur de LAPLACE,

$$(7)\qquad I^{\alpha}(I^{\beta}f(P))=I^{\alpha+\beta}f(P);\quad \alpha>0,\ \beta>0,\ \alpha+\beta<m$$

et

$$(8)\qquad \Delta I^{\alpha+2}f(P)=-I^{\alpha}f(P),$$

qui d'ailleurs déterminent entièrement le facteur $H_m(\alpha)$.

En tout point de continuité de f, on obtient par un passage à la limite $I^{0}f(P)=f(P)$. Dans des hypothèses de dérivabilité convenables, on peut par prolongement analytique étendre la définition de l'intégrale à des valeurs négatives de α. On appliquera la formule (8), ou bien on remplacera la formule (4) par une autre qu'on obtient par une application (itérée) de la formule de GREEN. On trouve en particulier

$$I^{-2k}f(P) = (-1)^k \Delta^k f(P).$$

Observons encore qu'il peut avoir un certain intérêt d'étendre la formule (7) aussi au cas où $\alpha+\beta \geqq m$. On le fait encore par prolongement analytique. A la fin du présent travail on trouve un exemple de l'utilité de cette extension.

3. La formule (8) met en évidence le fait que l'opérateur I^2 est dans un certain sens l'inverse de l'opérateur de LAPLACE (au signe près) et on comprend alors qu'il mérite une attention particulière. On trouve pour $m \neq 2$

$$I^2 f(P) = \frac{\Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right)}{4\pi^{\frac{m}{2}}} \int_{\Omega} f(Q) r_{PQ}^{2-m} dQ$$

qu'on peut désigner sous le nom de *potentiel newtonien* correspondant à la couche de densité spatiale $f(Q)$, bien que le facteur devant l'intégrale n'intervienne pas dans la forme usuelle de ce potentiel.

L'interprétation qui précède échoue pour $m=2$. L'intégrale est alors indépendante de P et le facteur devant l'intégrale devient infini. Cependant, dans l'hypothèse particulière que l'intégrale de $f(Q)$ étendue à l'espace entier, c'est-à-dire la masse totale, s'annule, on peut poser

$$I^2 f(P) = \lim_{\varepsilon \to 0} I^{2-\varepsilon} f(P) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\pi 2^{2-\varepsilon} \Gamma\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)} \int_{\Omega_2} f(Q) r_{PQ}^{-\varepsilon} dQ =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\pi 2^{2-\varepsilon} \Gamma\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)} \int_{\Omega_2} f(Q) (r_{PQ}^{-\varepsilon} - 1) dQ =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_2} f(Q) \log \frac{1}{r_{PQ}} dQ,$$

c'est le potentiel logarithmique.

Dans le cas où la masse totale est différente de zéro, on arrive encore au potentiel logarithmique par un passage à la limite modifié. En effet, on peut poser

$$I^2 f(P) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2} (I^{2-\varepsilon} f(P) + I^{2+\varepsilon} f(P)) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_2} f(Q) \log \frac{1}{r_{PQ}} dQ.$$

Les choses se passent d'une manière analogue pour une dimension m quelconque, bien entendu non plus pour $\alpha = 2$ mais pour $\alpha = m$. Le potentiel $I^m f(P)$ pourra toujours être interprété comme un potentiel logarithmique, la seule différence étant que l'indice $\alpha = m$ n'est un indice particulièrement important que dans le cas $m = 2$ où les indices $\alpha = m$ et $\alpha = 2$ deviennent identiques.

4. On peut aussi remplacer la fonction f par une différentielle de Stieltjes et poser[4])

$$U^\alpha(P) = \frac{1}{H_m(\alpha)} \int_\Omega r_{PQ}^{\alpha - m} d\mu(Q); \qquad \alpha > 0, \tag{9}$$

μ étant une fonction additive d'ensemble. On aura alors

$$I^\alpha U^\beta(P) = U^{\alpha+\beta}(P); \qquad \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \alpha + \beta < m \tag{10}$$

et

$$\Delta U^{\alpha+2}(P) = - U^\alpha(P). \tag{11}$$

En formant dans le même ordre d'idées la fonction

$$V^\beta(\beta) = \frac{1}{H_m(\beta)} \int_\Omega r_{PQ}^{\beta - m} d\nu(Q),$$

on a la formule de composition ($\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta < m$)

$$\int_\Omega U^\alpha(T)\, V^\beta(T)\, dT = \frac{1}{H_m(\alpha + \beta)} \iint_\Omega r_{PQ}^{\alpha+\beta-m} d\mu(P)\, d\nu(Q). \tag{12}$$

En spécialisant les fonctions et les indices, on en tire pour $0 < \alpha < m$

$$\iint_\Omega r_{PQ}^{\alpha - m} d\mu(P)\, d\mu(Q) = H_m(\alpha) \int_\Omega \left[U^{\frac{\alpha}{2}}(T) \right]^2 dT, \tag{13}$$

formule qui joue un rôle décisif dans les recherches de M. Frostman sur le potentiel d'équilibre.

Le second membre de la formule ci-dessus étant non négatif, on voit que l'intégrale double, qui n'est autre que l'intégrale

---

4) Jusqu'à nouvel ordre nous supposons que toutes les intégrales de Stieltjes figurant dans le texte soient absolument convergentes. Pour une hypothèse plus générale *voir* le chapitre III.

d'énergie, est $\geqq 0$ pour $0 < \alpha < m$.[5]) On peut facilement préciser cette inégalité en démontrant que le signe d'égalité ne peut avoir lieu que dans le cas évident où la *fonction* d'ensemble μ s'annule identiquement. En effet on voit par la formule (13) que l'égalité entraîne que la fonction $U^{\frac{\alpha}{2}}(T)$ s'annule presque partout, et alors le fait énoncé découle du théorème d'unicité démontré plus loin (n° **10**).

Dans le cas où la masse totale s'annule, la formule (13) devient à la limite

$$\iint\limits_{\Omega} \log \frac{1}{r_{PQ}}\, d\mu(P)\, d\mu(Q) = 2^{m-1} \pi^{\frac{m}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \int\limits_{\Omega} \left[U^{\frac{m}{2}}(T)\right]^2 dT,$$

identité qui joue le même rôle dans la théorie du potentiel logarithmique que l'identité (13) dans le cas général.

Chapitre II. — Capacité et potentiel d'équilibre.

5. En supprimant le facteur $1/H_m(\alpha)$ qui figure dans les considérations précédentes, nous allons considérer des potentiels de la forme $\int r_{PQ}^{\alpha-m}\, d\mu(Q)$. Quant à l'exposant α, nous admettons ici et sauf avis contraire dans la suite qu'il satisfait aux inégalités $0 < \alpha \leqq 2$,[6]) l'exposant $\alpha = 2$ donnant le cas le plus important, le potentiel newtonien. Pour $m = 2$ (le cas du plan) nous excluons cet exposant, le potentiel newtonien étant alors à remplacer (*voir* le n° **3**) par le potentiel logarithmique qui n'interviendra plus dans la suite. Pour $m = 1$, nous nous restreignons en général à ceux des exposants α qui satisfont aux inégalités $0 < \alpha < 1$ (*voir* pourtant le n° **34**). D'ailleurs en ce qui concerne les dimensions $m = 1$ et 2, le lecteur trouvera souvent dans cet exposé des lacunes faciles à combler.

Ce chapitre traite de la *capacité* des ensembles et de leur *potentiel d'équilibre*. En nous contentant de rendre compte de l'état actuel de ces problèmes, nous aurons avant tout à parler du pro-

---

[5]) Récemment (O. Frostman, La méthode de variation de Gauss et les fonctions sousharmoniques, *ces Acta*, **8** (1937), p. 149—159) M. Frostman a montré que l'intégrale d'énergie est encore $\geqq 0$, si l'on remplace le noyau du texte par la fonction de Green.

[6]) Pour la dernière limitation *voir* p. 40 de la Thèse de M. Frostman citée ci-après.

grès marqué par un travail fondamental de M. DE LA VALLÉE POUSSIN[7]) et par la Thèse de M. FROSTMAN.[8])

6. Voici comment on peut définir la capacité d'un ensemble mesurable au sens de BOREL[9]).

Pour toutes les répartitions positives de la masse unité sur l'ensemble E, l'intégrale d'énergie

$$\iint_E r_{PQ}^{\alpha-m}\, d\mu(P)\, d\mu(Q)$$

a une borne inférieure W_E, finie ou infinie. D'autre part le potentiel correspondant à une telle répartition

$$\int_E r_{PQ}^{\alpha-m}\, d\mu(Q)$$

a une borne supérieure, finie ou infinie. Désignons par V_E la borne inférieure, finie ou non, de ces bornes supérieures. On a alors $V_E = W_E$ et la capacité $C(E)$[10]) de l'ensemble E peut se définir par $C(E) = W_E^{-1} = V_E^{-1}$.

Voici deux propriétés de la capacité, dont la première est évidente et la seconde facile à démontrer. Si l'ensemble E_1 est compris dans l'ensemble E_2, on a toujours $C(E_1) \leqq C(E_2)$. D'autre part, pour un nombre fini ou une infinité dénombrable d'ensembles E_n on a toujours $C(\Sigma E_n) \leqq \Sigma C(E_n)$.

7. Il faut prêter une attention particulière aux *ensembles de capacité nulle*. D'après ce qu'on vient de dire, un tel ensemble est caractérisé par le fait qu'il ne peut porter aucune masse positive dont le potentiel reste borné partout. Pour un ensemble fermé de capacité nulle on peut même démontrer que le potentiel de toute répartition positive portée par un tel ensemble devient infini en un point au moins de l'ensemble.[11]) On tire des propriétés précéden-

---

7) C. DE LA VALLÉE POUSSIN, Extension de la méthode du balayage de Poincaré et problème de Dirichlet, *Annales de l'Institut H. Poincaré*, **2** (1932), p. 169—232.

8) O. FROSTMAN, Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions, *Meddel. Lunds Univ. Mat. Sem.*, **3** (1935), p. 1—118, citée dans la suite comme „*Thèse*".

9) *Thèse*, p. 48.

10) Notre façon de normer la capacité est différente de celle de M. FROSTMAN. La valeur $C(E)$ du texte s'écrit dans la notation de M. FROSTMAN $[C(E)]^{m-\alpha}$

11) *Thèse*, p. 83.

tes que la masse partielle portée par un ensemble de capacité nulle s'évanouit si le potentiel dû à la masse totale est fini partout ou si l'intégrale d'énergie est finie. Ce fait remarquable permet de *négliger les ensembles de capacité nulle dans toute intégration suivant des répartitions produisant des potentiels finis.* Il s'agissait ici de potentiels dus à des masses positives. Pour un complément important concernant les potentiels dus à des masses de signe variable *voir* le n° **13.**

Notons encore que la somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles de capacité nulle est de capacité nulle et qu'un ensemble de capacité nulle est toujours en même temps un ensemble de mesure nulle au sens de LEBESGUE.

8. Passons maintenant aux ensembles de capacité positive et en particulier aux ensembles fermés de cette espèce. Au sujet de tels ensembles M. FROSTMAN donne le théorème fondamental[12]) que voici.

Soit F un ensemble fermé et borné quelconque de capacité $C(F) > 0$; il existe alors une répartition unique de masse positive sur F dont le potentiel est constant et égal à un sur F sauf au plus dans un ensemble de capacité nulle ne contenant aucun point intérieur de F. Le potentiel de cette répartition est partout $\leqq 1$, sa masse totale et l'intégrale d'énergie correspondante ont la valeur commune $C(F)$. Toute autre répartition de la masse $C(F)$ sur F engendre un potentiel dont la borne supérieure est > 1 et une intégrale d'énergie $> C(F)$.

C'est précisément comme solution des problèmes de minimum auxquels lesdites propriétés donnent lieu que M. FROSTMAN, en rétablissant en toute rigueur un principe de variation dû à GAUSS, obtient la répartition en question. Le potentiel engendré s'appelle *le potentiel d'équilibre* attaché à l'ensemble F. Arrêtons-nous un instant sur les différences entre le cas général $0 < \alpha < 2$ et le cas classique, celui du potentiel newtonien correspondant à $\alpha = 2$, en notant quelques faits importants qui pour ainsi dire sont caractéristiques pour ce dernier cas. Ni la capacité ni le potentiel d'équilibre newtoniens ne sont changés si l'on ajoute ou retranche un ensemble de points faisant partie d'un domaine complètement limité au dehors par F ou un sous-ensemble de F.[13]) Cela pro-

[12]) *Thèse,* p. 56.

[13]) *Thèse,* p. 39 et 55.

vient de la propriété très remarquable, particulière au cas classique, que les masses produisant le potentiel d'équilibre se trouvent toujours sur la frontière (externe). Le potentiel est $=1$ en tout point extérieur à F n'appartenant pas au domaine connexe infini limité par F. Dans ce dernier domaine le potentiel est <1. Pour les autres exposants le potentiel d'équilibre est <1 en tout point extérieur à F. Cela découle immédiatement du fait que le laplacien est positif en tous ces points.

Chapitre III. — Quelques propriétés générales du potentiel.

9. Dans sa Thèse M. FROSTMAN démontre un théorème important disant que *le potentiel d'une distribution positive ne devient infini que sauf peut-être dans un ensemble de capacité nulle*[14]).

Remarquons que M. FROSTMAN admet toujours que les masses sont situées dans un domaine borné, hypothèse commode et très naturelle à son point de vue, puisque c'est le potentiel d'équilibre des ensembles bornés qui l'intéresse en premier lieu. *Il nous sera utile de nous placer dans la suite dans des hypothèses un peu plus générales.* Nous admettrons des potentiels dus à des masses qui peuvent s'étendre à l'infini. La masse portée par un ensemble borné sera toujours finie, tandis que la masse totale peut bien devenir infinie. Il faut alors faire une hypothèse complémentaire. En supposant d'abord les masses positives nous admettrons, pour un point fixé P, que le potentiel devient fini si l'on écarte les masses qui se trouvent au voisinage de P. Cette hypothèse concerne en réalité l'influence des masses très éloignées et elle est évidemment indépendante du point P. Il est manifeste que le théorème de M. FROSTMAN subsiste encore dans ce cas et que notre hypothèse est équivalente à celle exigeant que le potentiel soit fini en un point au moins. Quant aux potentiels dus à des masses ν de signe variable, on admettra que ces masses peuvent s'écrire sous la forme $\nu = \nu_1 - \nu_2$, ν_1 et ν_2 étant des masses positives satisfaisant aux conditions ci-dessus. La décomposition la plus avantageuse sera donnée par la formule $\nu = \nu^+ - \nu^-$ où ν^+ est la variation positive et ν^- la variation négative de ν, $\nu^+ + \nu^-$ étant la variation totale. On a alors $d\nu = d\nu^+ - d\nu^-$ et $|d\nu| = d\nu^+ + d\nu^-$. Un tel potentiel sera *bien déterminé* excepté

[14]) *Thèse*, p. 81.

aux points où les potentiels dus à ν^+ et à ν^- deviennent infinis tous les deux. Grâce au théorème de M. FROSTMAN on voit que ces *points d'indétermination* forment au plus un ensemble de capacité nulle.

10. Nous donnerons ici deux théorèmes d'unicité. Dans le premier nous ne ferons que la restriction $0<\alpha<m$, tandis que dans le second il s'agira de restrictions de caractère tout à fait différent. La démonstration du premier théorème n'est pas trop simple, tandis que celle du second se fait en quelques lignes.

Tout potentiel est entièrement déterminé par les masses qui l'engendrent. La réciproque est vraie, ce qui revient à dire qu'à un potentiel identiquement nul il correspond une masse identiquement nulle.

$$v(P)=\int_{\Omega} r_{PQ}^{\alpha-m}\,d\nu(Q)$$

étant un potentiel qui s'annule en tout point P à l'exception au plus d'un ensemble de mesure nulle, la masse ν est identiquement nulle.

Nous indiquons brièvement la démonstration de ce théorème. Gràce à la formule (10) du n° **4** le cas $\alpha>2$ se réduit facilement au cas $0<\alpha\leqq 2$. Cela étant, soit $K(P)$ une fonction qui avec ses dérivées des deux premiers ordres est continue dans tout l'espace et s'annule identiquement dans la partie éloignée de l'espace. On aura alors d'après la formule qu'on vient de citer

$$K(P)=-I^2\Delta K(P)=I^\alpha(I^{2-\alpha}h(P))=I^\alpha k(P),$$

avec $h(P)=-\Delta K(P)$ et $k(P)=I^{2-\alpha}h(P)$. En multipliant le potentiel $v(P)$, qui s'annule presque partout, par $k(P)$, en intégrant et en admettant ici le fait que l'interversion de l'ordre des intégrations est légitime[15]), il vient

$$\begin{aligned}0&=\int_{\Omega} k(P)\,v(P)\,dP=\int_{\Omega} k(P)\,dP\int_{\Omega} r_{PQ}^{\alpha-m}\,d\nu(Q)=\\&=\int_{\Omega} d\nu(Q)\int_{\Omega} k(P)r_{PQ}^{\alpha-m}\,dP=H_m(\alpha)\int_{\Omega} I^\alpha k(Q)\,d\nu(Q)=\\&=H_m(\alpha)\int_{\Omega} K(Q)\,d\nu(Q).\end{aligned}$$

[15]) La démonstration de ce fait est assez délicate dans le cas où les masses s'étendent à l'infini.

On en tire facilement par des méthodes d'approximation connues que la dernière intégrale s'annule encore sous des conditions moins restrictives concernant la fonction K; entre autres elle s'annule lorsque K désigne la fonction caractéristique d'un ensemble fermé et borné d'ailleurs quelconque. Il en résulte immédiatement que la fonction d'ensemble ν s'annule identiquement.

11. Nous passons maintenant au second théorème d'unicité dans lequel l'exposant newtonien et certains autres exposants moins intéressants font exception.

Soient F un ensemble fermé et α un exposant $\neq 2+2k$ et $\neq m+2k$ avec $k=0, 1, 2, \ldots$, et admettons que le potentiel

$$v(P)=\int_F r_{PQ}^{\alpha-m}\,d\nu(Q)$$

s'annule identiquement dans un domaine partiel D de $\Omega-F$. Alors la masse ν est identiquement nulle.

Sans restreindre la généralité on peut admettre que le domaine D comprend tout l'extérieur d'une sphère de rayon très grand, le cas général pouvant facilement se réduire à ce cas-là par une transformation de Kelvin (n° **14**). L'ensemble F sera alors évidemment un ensemble borné. Formons maintenant le produit, identiquement nul dans D, $r_{PQ'}^{\alpha-m}v(P)$ où Q' désigne un point fixe de F. En faisant tendre P vers l'infini, on trouve que la masse totale $\int_F d\nu(Q)=0$. En formant d'autre part les laplaciens successifs et en observant que $\Delta r^{\alpha-m}=(\alpha-2)(\alpha-m)\,r^{\alpha-2-m}$, où le facteur $(\alpha-2)(\alpha-m)\neq 0$, on voit que les potentiels qu'on obtient en remplaçant α par $\alpha-2, \alpha-4, \ldots, \alpha-2k, \ldots$ s'annulent aussi dans le domaine D. Cela étant, désignons par $x_1, x_2, \ldots, x_m$ et $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ les coordonnées respectives des points P et Q et observons que p. ex. $\dfrac{\partial v(P)}{\partial x_1}$ s'annule aussi identiquement dans D, ce qui peut s'écrire

$$0=\int_F(\xi_1-x_1)\,r_{PQ}^{\alpha-2-m}\,d\nu(Q)=\int_F \xi_1 r_{PQ}^{\alpha-2-m}\,d\nu(Q).$$

Il en résulte comme plus haut $\int_F \xi_1 d\nu(Q)=0$. On trouve de la même façon de proche en proche que tous les moments de la distribution ν s'annulent, ce qui — F étant un ensemble borné — entraîne le fait que ν est identiquement nul.

Le théorème est évidemment en défaut dans le cas classique. P. ex. le potentiel dû à la masse $+1$ placée au centre d'une sphère et à la masse -1 distribuée uniformément sur la surface de la sphère est identiquement nul à l'extérieur de la sphère. La raison en est que, de l'évanouissement de ce potentiel, on ne peut pas conclure à celui des potentiels successifs donnés ci-dessus, puisque $\Delta r^{2-m}=0$.

12. Nous donnons maintenant un théorème de la moyenne qui admet une application intéressante au potentiel d'équilibre et par là, comme on verra plus loin, à la fonction de Green.

Soit $v(P)$ le potentiel d'une distribution positive. On a en tout point P

$$v(P)=\lim \frac{1}{s}\int_s v(T)\,dT,$$

s étant une sphère, décrite autour de P, de volume s et de rayon tendant vers zéro[16]). Le théorème subsiste évidemment pour des masses de signe variable en tout point P où le potentiel est bien déterminé.

Pour la démonstration on peut recourir à un procédé utilisé par M. Frostman dans une évaluation analogue[17]).

De ce théorème on conclut facilement que:

Pour que le potentiel d'équilibre u relatif à un ensemble fermé F admette la valeur 1 en un point frontière P de l'ensemble, il faut que l'on ait

$$\lim_{T\to P} u(T)=1$$

et il suffit que cette égalité ait lieu pour les points T extérieurs à F.

13. Le théorème suivant dont nous aurons besoin plus loin et qui est relatif à des potentiels bornés dus à des masses de signe quelconque complète sous certains rapports un théorème de M. Frostman sur les potentiels finis dus à des masses positives (n° **7**).

Si un potentiel est borné supérieurement (inférieurement) sauf

---

[16]) Ce théorème est bien connu dans le cas classique où il est une conséquence immédiate de la surharmonicité et de la semicontinuité inférieure. Nous donnerons aux n$^{\text{os}}$ **21** et **32** d'autres moyennes de structure plus compliquée qui sont mieux appropriées au cas non-newtonien que la moyenne ci-dessus.

[17]) *Thèse*, p. 37.

au plus dans un ensemble de capacité nulle, la variation positive (négative) de la masse s'annule sur tout ensemble de capacité nulle. Si donc le potentiel est borné dans les deux sens (sauf au plus etc.) la variation totale de la masse s'annule sur tout ensemble de capacité nulle.

Nous indiquons brièvement la démonstration. Admettons que le potentiel v dû à la masse ν soit borné supérieurement par la constante L sauf au plus dans un certain ensemble de capacité nulle. Soit alors E un ensemble fermé et borné quelconque de capacité nulle et désignons par E_n des ensembles fermés qui comprennent E et tendent en se rétrécissant vers E et qui admettent des potentiels d'équilibre u_n au sens strict. Les masses correspondantes étant désignées par μ_n on aura

$$\int\limits_{\Omega} u_n d\nu = \int\limits_{\Omega} v d\mu_n \leqq L \int\limits_{\Omega} d\mu_n = L\mu_n(E_n).$$

On a $u_n = 1$ sur E_n et par conséquent sur E. D'autre part, puisque la capacité de E est nulle, $\mu_n(E_n)$ tend vers zéro et il en est de même de u_n en tout point extérieur à E. On trouve donc par un passage à la limite (légitime puisque les u_n sont bornés dans leur ensemble) $\nu(E) \leqq 0$, ce qui implique le théorème.

14. Nous terminons ce chapitre par quelques remarques sur la *transformation de* Kelvin. Soient F un ensemble fermé et M un point, extérieur à l'ensemble jusqu'à nouvel ordre. Effectuons une *inversion* de centre M, les points correspondants P et P' situés sur le même rayon issu de M étant liés par la relation

$$r_{MP} \cdot r_{MP'} = 1. \tag{1}$$

Il vient

$$r_{P'Q'} = \frac{r_{PQ}}{r_{MP} \cdot r_{MQ}}. \tag{2}$$

L'ensemble F sera transformé en un ensemble F' fermé et borné. Si deux distributions μ et μ', la première sur F, la seconde sur F', sont liées par la relation

$$d\mu'(Q') = r_{MQ}^{\alpha-m} d\mu(Q), \tag{3}$$

on a évidemment

$$\int\limits_{F'} r_{P'Q'}^{\alpha-m} d\mu'(Q') = r_{MP}^{m-\alpha} \int\limits_{F} r_{PQ}^{\alpha-m} d\mu(Q). \tag{4}$$

Il ressort immédiatement de cette formule que l'inversion (1) transforme des ensembles de capacité positive ou nulle en des ensembles présentant respectivement le même caractère.

Si le point M appartient à l'ensemble F, il n'y a rien à changer à la formule pourvu qu'aucune masse ne soit concentrée en M.[18]) Dans le cas contraire, la masse concentrée en M étant c, la formule (4) est à remplacer par cette autre

$$(4') \qquad \int_{F'} r_{P'Q'}^{\alpha-m} d\mu'(Q') + c = r_{MP}^{m-\alpha} \int_{F} r_{PQ}^{\alpha-m} d\mu(Q).$$

Le terme c est à considérer comme une contribution venant du point à l'infini que l'inversion fait correspondre au point M.

Dans un ordre d'idées général, à toute fonction donnée $f(P)$ on peut faire correspondre une fonction $f'(P')$ définie par la formule

$$(5) \qquad f'(P') = r_{MP}^{m-\alpha} f(P),$$

les points P et P' étant toujours liés par l'inversion (1). On voit par ce qui précède que la classe des fonctions $v(P)+c$, où $v(P)$ est un potentiel et c une constante, est invariante par rapport à cette transformation. Les fonctions de cette classe interviendront en particulier dans les derniers chapitres du présent travail.

Chapitre IV. — Les masses de Green et la fonction de Green.

15. Soient F un ensemble fermé, non nécessairement borné, de capacité positive, M un point extérieur à F, et désignons par μ' la distribution engendrant le potentiel d'équilibre sur l'ensemble fermé et borné F' que la transformation (1) du numéro précédent fait correspondre à F. En définissant alors la distribution de masse positive μ_M relative à F par la formule (3) du même numéro, il vient

$$(1) \qquad \int_{F} r_{PQ}^{\alpha-m} d\mu_M(Q) = r_{MP}^{\alpha-m},$$

égalité valable pour tout point P de F excepté peut-être pour un ensemble de capacité nulle. Le calcul étant réversible, on conclut que la distribution μ_M est entièrement déterminée par cette propriété-là. Le potentiel d'équilibre étant toujours $\leqq 1$, on a encore l'inégalité fondamentale

[18]) Evidemment l'ensemble F' cesse d'être borné.

$$h_M(P) = \int_F r_{PQ}^{\alpha-m}\, d\mu_M(Q) \leqq r_{MP}^{\alpha-m}, \tag{2}$$

P étant un point tout à fait arbitraire de l'espace. Nous appellerons les masses μ_M *masses de Green relatives à l'ensemble F et au pôle M.* En désignant maintenant par M et P deux points arbitraires extérieurs à F, on a la formule de symétrie $h_M(P) = h_P(M)$. On a en effet

$$h_M(P) = \int_F r_{PQ}^{\alpha-m}\, d\mu_M(Q) = \int_F d\mu_M(Q) \int_F r_{QT}^{\alpha-m}\, d\mu_P(T) =$$
$$= \iint_F r_{QT}^{\alpha-m}\, d\mu_M(Q)\, d\mu_P(T),$$

formule symétrique en M et en P. Observons que dans les intégrations on a négligé des ensembles de capacité nulle, ce qui est légitime d'après une remarque antérieure.

La fonction de Green se définit par la formule

$$G_M(P) = r_{MP}^{\alpha-m} - h_M(P), \tag{3}$$

M étant toujours extérieur à F. Elle est évidemment $\geqq 0$ pour tout point P, l'égalité ayant lieu en tout point de F sauf au plus dans un ensemble de capacité nulle. On a aussi la relation de symétrie $G_M(P) = G_P(M)$ (M et P extérieurs à F).

Les propriétés énumérées du potentiel d'équilibre se traduisent immédiatement en des propriétés correspondantes de la fonction de Green. Au lieu d'insister ici sur les détails (nous revenons sur quelques points dans la suite) nous nous contentons de formuler le critère suivant qui se déduit immédiatement du critère analogue donné au n° **12** pour le potentiel d'équilibre.

La fonction de Green s'annule en tout point intérieur de F. Pour qu'elle s'annule en un point frontière P, il faut que l'on ait

$$\lim_{T \to P} G_M(T) = 0 \tag{4}$$

et il suffit que cette égalité ait lieu pour les points T extérieurs à F.

Observons le fait capital que les masses de Green s'évanouissent sur tout sous-ensemble de capacité nulle. Cela est une conséquence immédiate du fait qu'elles engendrent un potentiel borné (*cf.* le n° **7**).

Chapitre V. — L'intégrale de Poisson et l'inégalité de Harnack.

16. Pour déterminer la fonction de Green relative à l'extérieur ou à l'intérieur d'une sphère nous aurons d'abord à résoudre le problème d'équilibre pour un volume sphérique. La solution due à MM. Pólya et Szegö[19]) pour les dimensions $m=1, 2, 3$ s'étend facilement à une dimension quelconque m.

Soient S^* l'intérieur d'une sphère S de rayon R, r_Q la distance du point Q au centre de la sphère, dQ l'élément de volume, α un exposant satisfaisant aux inégalités $0<\alpha<2$, et posons

$$(1)\qquad u(P)=\pi^{-\left(\frac{m}{2}+1\right)}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\sin\frac{\pi\alpha}{2}\int_{S^*}(R^2-r_Q^2)^{-\frac{\alpha}{2}}r_{PQ}^{\alpha-m}dQ.$$

On a alors $u(P)=1$ pour tout point P du domaine S^*, surface comprise.

Nous omettons ici le calcul qui est assez laborieux. Un point essentiel y est l'invariance de l'expression

$$D^S_{P_1P_2}=\frac{r^2_{P_1P_2}}{\delta^S_{P_1}\cdot\delta^S_{P_2}}$$

par rapport à toute inversion.[20]) Ici on a posé

$$\delta^S_P=\frac{|R^2-r_P^2|}{R}.$$

Bien entendu, l'inversion transforme la sphère en même temps que les points. Rien n'est changé si le produit des rayons vecteurs réciproques est $\pm k^2$ au lieu de 1. Dans l'application actuelle on choisit comme centre de l'inversion le point P et on transforme la surface de la sphère S en elle-même. Le fait que $r_{PQ}^{-m}dQ$ est invariant, si l'on remplace Q par Q', facilite encore le calcul.

Du potentiel d'équilibre on déduit comme plus haut la fonction de Green. Soient S une sphère, M un point quelconque qui n'est pas situé sur S, et désignons par S^* celui des deux volumes sphériques limités par S auquel M est *extérieur*. On pose

---

19) G. Pólya und G. Szegö, Über den transfiniten Durchmesser (Kapazitätskonstante) von ebenen und räumlichen Punktmengen, *J. f. Math.*, 165 (1931). p. 4—49.

20) *Cf.* M. Riesz, Sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions etc., *Fysiogr. Sällsk. Lund förh.*, 1 (1931), n° 4, p. 18—38.

(2) $$h_M(P)=\int_{S^*} r_{PQ}^{\alpha-m}\lambda_M(Q)\,dQ,$$

la masse de GREEN $\lambda_M(Q)\,dQ$ étant donnée par la formule

(3) $$\lambda_M(Q)=\pi^{-\left(\frac{m}{2}+1\right)}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\sin\frac{\pi\alpha}{2}\,|R^2-r_M^2|^{\frac{\alpha}{2}}\,|R^2-r_Q^2|^{-\frac{\alpha}{2}}\,r_{MQ}^{-m},$$

et on obtient pour tout point P de S^* (surface comprise) $h_M(P)=r_{MP}^{\alpha-m}$.

La structure du noyau (3) est très analogue à celle du noyau classique de POISSON. On peut obtenir celui-ci en faisant tendre α vers 2. En effet, grâce au facteur sinus, qui tend vers zéro, il en sera de même de $\lambda_M(Q)$ en tout point Q intérieur à S^*. Quant aux points frontières Q, la contribution d'une lamelle mince adjacente à un élément dS de la surface autour de Q tendra vers $(\omega_m R)^{-1}|R^2-r_M^2|\,r_{MQ}^{-m}dS$ où ω_m est la surface totale de la sphère unité, et on retombe sur le noyau classique.

La fonction de GREEN relative au volume S^* et au pôle M s'écrit évidemment

$$G_M(P)=r_{MP}^{\alpha-m}-h_M(P).$$

17. Cela posé, soit $v(P)$ un potentiel engendré par des masses quelconques situées ou à l'extérieur ou à l'intérieur d'une certaine sphère S, et désignons par S^* celui de ces deux domaines qui renferme les masses, la surface S comprise. Nous nous proposons d'exprimer les valeurs admises par le potentiel dans le domaine complémentaire $\Omega-S^*$ par celles admises dans le domaine S^*. On arrivera ainsi à une formule qui peut être considérée comme une généralisation de *l'intégrale de Poisson*. En effet, M étant un point quelconque du domaine $\Omega-S^*$, on a

(4) $$v(M)=\int_{S^*} v(Q)\,\lambda_M(Q)\,d(Q).$$

Cette formule, qui s'établit facilement par l'interversion de deux intégrations, forme un cas très particulier des formules (1) et (2) du n° **19** qu'on rencontrera plus loin.

Envisageons en particulier le cas où le potentiel $v(P)$ est non négatif sur S^*. Notre formule met en évidence qu'il en sera de même en $\Omega-S^*$. Mais il y en a plus. Soient M_0 et M deux points arbitraires de ce dernier domaine. On trouve alors immédiatement *l'inégalité de* HARNACK

$$(5) \qquad v(M) \leqq \left| \frac{R^2 - r_M^2}{R^2 - r_{M_0}^2} \right|^{\frac{\alpha}{2}} \left| \frac{R - r_M}{R + r_{M_0}} \right|^{-m} v(M_0).$$

Appliquée à une suite de potentiels $v_n(P)$ non négatifs avec des masses situées sur S^*, notre inégalité met en évidence les faits suivants. Lorsque $v_n(M)$ tend vers zéro en un seul point M de $\Omega - S^*$, il en sera de même en tout point de ce domaine et cela uniformément dans tout domaine qui avec sa frontière est intérieur au sens strict à $\Omega - S^*$. Fait analogue lorsque la série Σv_n converge en un seul point M de $\Omega - S^*$. Ces faits s'étendent de proche en proche à tout domaine connexe qui ne renferme pas de masses.

Dans la théorie classique, on parle de fonctions harmoniques positives dans un domaine et non pas de potentiels. Cependant il est bien facile de faire rentrer le cas classique sous le point de vue adopté ici. Soit en effet D un domaine simplement connexe et u une fonction harmonique dans D. En désignant par D' un domaine intérieur au sens strict à D et de frontière assez régulière, u pourra à l'intérieur de D' s'écrire comme potentiel d'une simple couche étalée sur la frontière de D'. Pour l'extérieur de D' ce potentiel est identique à la solution du problème de DIRICHLET extérieur, posé pour la frontière de D' avec des valeurs frontières coïncidant avec celles du u. Alors si u est positif, il en sera de même du potentiel dans l'espace entier.

Chapitre VI. — Etude approfondie de la fonction de Green.

18. On suppose dans ce chapitre et dans toute la suite que *F désigne un ensemble fermé de capacité positive.* Quant à l'exposant α on suppose ici $0 < \alpha \leqq 2$, le signe d'égalité inclus.

Nous donnerons d'abord une généralisation d'un théorème important de M. BOULIGAND.

Soient Q' un point frontière de l'ensemble F et D un domaine connexe dont la frontière est formée par F ou un sous-ensemble de F. Si la fonction de Green s'annule en Q' pour une seule position du pôle M dans D, elle s'annulera en Q' pour toute autre position du pôle dans D.

En tenant compte du critère donné à la fin du chap. IV, le théorème ci-dessus se réduit au théorème suivant.

$P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ étant des points extérieurs à F tendant vers Q', si la relation

$$\lim_{P_n \to Q'} G_M(P_n) = 0$$

a lieu pour une position de M dans D, elle a lieu pour toute autre position de ce point dans D.

Observons d'abord que l'on a $G_M(P_n) = G_{P_n}(M)$. Le potentiel $G_{P_n}(M)$, dû à des masses situées sur F et en P_n, étant partout $\geqq 0$, la première application que nous avons donnée de l'inégalité de HARNACK met en évidence que si ce potentiel tend vers zéro avec $n \to \infty$ pour *un* point M de D, il tend vers zéro en *tout* point de D.

Cela étant, les points exceptionnels de la frontière, c'est-à-dire les points Q'' pour lesquels on a $G_M(Q'') > 0$, sont les mêmes pour tout point M du domaine D et, grâce aux résultats sur les points exceptionnels de la fonction de Green à pôle fixe, ils forment un ensemble F''_D de capacité nulle ne dépendant que du domaine adjacent D. En remarquant qu'il existe au plus un ensemble dénombrable de domaines connexes D limités par F, on conclut que l'ensemble F'' somme des F''_D est encore un ensemble de capacité nulle, évidemment mesurable au sens de BOREL. Les points Q'' de l'ensemble F'' sont appelés *points irréguliers de F*. Ils sont caractérisés par le fait qu'il existe au moins un point M extérieur à F, de sorte que $G_M(Q'') > 0$. Nous introduisons aussi les ensembles $F'_D = F - F''_D$ et leur partie commune $F' = F - F''$. Les points Q' de F'_D sont caractérisés par la propriété: $G_M(Q') = 0$ pour tout point M appartenant à D et ceux de F' par la propriété que cette égalité a lieu pour tout point M extérieur à F. Nous appelons les points de F' *points réguliers de F* et ceux de F'_D *points réguliers de F par rapport au domaine D*. Ce sont ces derniers points que d'ordinaire on désigne comme points réguliers quand il s'agit d'un problème de DIRICHLET posé pour le domaine D.

Notons encore les faits suivants qui ont lieu *dans le cas newtonien* et qui résultent immédiatement des propriétés correspondantes du potentiel d'équilibre. M étant un point de D, la masse de GREEN μ_M se trouve sur la frontière F_D de D et l'ensemble F_D renferme l'ensemble irrégulier F''_D. Les masses de GREEN μ_M relatives aux ensembles F_D, F et $\Omega - D$ sont identiques. Quelques conséquences importantes de ces faits seront rassemblées au n° **24.**

19. Nous sommes maintenant en mesure de résoudre le problème suivant que nous formulons d'abord d'une manière un peu vague. Soit $v(P)$ un potentiel engendré par des masses (inconnues) réparties sur l'ensemble F. Les valeurs de v étant connues sur F, calculer v en un point extérieur à F. Nous donnerons la solution de ce problème sous certaines conditions restrictives très naturelles en déduisant d'abord une formule tout à fait générale.

Le potentiel v étant engendré par des masses ν situées sur F, on a en tout point M extérieur à F

$$v(M) = \int_F v(Q)\, d\mu_M(Q) + \int_{F''} G_M(Q)\, d\nu(Q). \tag{1}$$

Cette formule résulte immédiatement des formules (1) et (3) du n° **15** et du fait que la fonction de GREEN $G_M(Q)$ s'annule en tout point régulier. Il est d'ailleurs clair que la dernière intégrale peut être prise sur F''_D au lieu de F''. Si les masses ν ne sont pas de signe constant, $v(Q)$ peut devenir indéterminé dans un sous-ensemble de F de capacité nulle, ce qui n'exerce aucune influence sur la validité de notre formule, puisque les masses de GREEN s'évanouissent sur un tel sous-ensemble (n° **15**).

La formule (1) se simplifie beaucoup, si les masses ν s'annulent sur l'ensemble F'' (ou F''_D). Il vient alors

$$v(M) = \int_F v(Q)\, d\mu_M(Q). \tag{2}$$

Signalons quelques cas importants où cette formule simplifiée a lieu. D'abord il en est ainsi si l'ensemble F'' est vide, c'est-à-dire que tous les points de F sont réguliers. P. ex. cela arrive toujours, d'après les résultats de M. FROSTMAN, si tout point de l'ensemble F satisfait à la condition de POINCARÉ, ce qui consiste en ce que chaque point de F peut être considéré comme le sommet d'un cône de révolution dont la pointe fait partie de F. Les volumes sphériques traités au chapitre précédent fournissent les exemples les plus simples. La formule (2) est encore valide si 1) $v(P)$ est un potentiel borné partout sauf au plus dans un ensemble de capacité nulle, 2) $v(P)$ est un potentiel partout fini, dû à des masses positives ou la différence de tels potentiels. En effet, dans ces circonstances les masses ν s'annulent sur l'ensemble F'' qui est de capacité nulle (n^{os} **13** et **7**).

Voici deux applications de ces résultats; on y suppose toujours que les masses sont situées sur F.

La formule simplifiée (2) ayant lieu pour une raison ou une autre et le potentiel v étant $\geqq 0$ sur F en tout point où il est bien déterminé, il sera $\geqq 0$ en tout point extérieur à F.

La masse totale de GREEN $\mu_M(F)$ est évidemment toujours $\leqq 1$.[21]) On peut préciser ce résultat dans le cas où F admet un potentiel d'équilibre u, ce qui, comme on sait, a toujours lieu si F est borné. On a alors $\mu_M(F) = u(M)$. Ces préliminaires posés, on comprendra l'intérêt de l'énoncé suivant qui se déduit facilement de la formule (1).

En désignant par l et L les bornes inférieure et supérieure sur F d'un potentiel v bien déterminé en tout point de F, on aura en tout point M extérieur à F

$$l\mu_M(F) \leqq v(M) \leqq L\mu_M(F).$$

Chapitre VII. — Le balayage de masses.

20. Soit ν une distribution quelconque de masses, situées en partie sur l'ensemble F, en partie sur l'ensemble complémentaire $\Omega - F$. Le problème de balayage consiste à remplacer ces dernières masses par des masses réparties sur F, de sorte que le potentiel reste conservé sur F (pour autant que cela est possible). Dans le cas où la masse extérieure à F est concentrée en un seul point M et que c'est la masse unité, ce sont les masses de GREEN μ_M qui fournissent la solution de ce problème. Le cas général se réduit facilement à ce cas particulier.

Soit e un sous-ensemble de F, mesurable au sens de BOREL, d'ailleurs arbitraire. La formule

$$\nu^*(e) = \int_{\Omega - F} \mu_M(e)\, d\nu(M) \tag{1}$$

définit une distribution de masses sur F dont on va préciser les propriétés tout à l'heure. P étant un point arbitraire de l'espace, il vient par la dernière formule et les formules (1) et (3) du n° **15**

$$\int_{\Omega - F} r_{PM}^{\alpha-m}\, d\nu(M) = \int_F r_{PO}^{\alpha-m}\, d\nu^*(O) + \int_{\Omega - F} G_M(P)\, d\nu(M).$$

En posant maintenant, sur l'ensemble F, $\bar{\nu} = \nu + \nu^*$, nous aurons

21) Pour le voir, on peut p. ex. faire tendre P vers l'infini dans l'inégalité (2) du n° **15**.

$$v(P)=\int_{\Omega} r_{PM}^{\alpha-m}\,d\nu(M)=\bar{v}(P)+\int_{\Omega-F} G_M(P)\,d\nu(M),$$

où

$$\bar{v}(P)=\int_{F} r_{PQ}^{\alpha-m}\,d\bar{\nu}(Q).$$

On a donc $\bar{v}(Q')=v(Q')$ *en tout point régulier* Q' *de* F.

Évidemment, cette égalité n'a pas lieu en général dans l'ensemble irrégulier F'' et dans l'ensemble ouvert $\Omega-F$. On peut préciser cet énoncé dans le cas important où la masse ν est de signe constant dans $\Omega-F$, p. ex. de signe *positif. Alors par le balayage le potentiel n'est jamais augmenté.* Il est diminué en tout point de $\Omega-F$ dans le cas non-newtonien, tandis que dans le cas newtonien il n'est diminué que dans ceux des domaines connexes adjacents qui, avant le balayage, contenaient de la masse.

La masse $\mu_M(e)$ s'annulant sur tout ensemble e de capacité nulle, on voit par la formule de définition (1) que la masse $\nu^*(e)$ résultant du balayage s'annule aussi sur tout tel ensemble. Par conséquent, elle s'annule sur l'ensemble des points irréguliers F'', et alors la distribution $\bar{\nu}=\nu+\nu^*$ est identique à ν sur cet ensemble. En tenant compte de ceci et de ce que $\bar{v}(Q)=v(Q)$ sauf au plus dans l'ensemble F'', on obtient à l'aide de la formule (1) du n° **19** l'expression suivante pour le potentiel $\bar{v}(M)$ en un point M extérieur à F

$$\bar{v}(M)=\int_{F} v(Q)\,d\mu_M(Q)+\int_{F''} G_M(Q)\,d\nu(Q). \tag{2}$$

Si en particulier l'ensemble irrégulier F'' n'existe pas ou si la variation totale de ν sur cet ensemble s'évanouit, l'expression devient

$$\bar{v}(M)=\int_{F} v(Q)\,d\mu_M(Q). \tag{3}$$

On pourra juger tout à l'heure de l'utilité des formules obtenues.

21. Un cas particulier intéressant, qui nous donnera aussi une formule de la moyenne, est celui où l'on balaye les masses sur l'extérieur S^* d'une sphère S de rayon R et de centre M. On trouve par spécialisation de la fonction $\lambda_M(Q)$ (formule (3) du n° **16**) que le nouveau potentiel aura en M la valeur

$$v_{S^*}(M) = \int_{S^*} v(Q)\varkappa_M(Q)\,dQ, \tag{4}$$

avec

$$\varkappa_M(Q) = \pi^{-\left(\frac{m}{2}+1\right)}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\sin\frac{\pi\alpha}{2}\,R^\alpha(r_Q^2 - R^2)^{-\frac{\alpha}{2}}r_Q^{-m}, \tag{5}$$

où l'on a posé $r_{MQ} = r_Q$. De nos résultats généraux sur le balayage on conclut immédiatement que si les masses engendrant v sont *positives,* on a

$$v_{S^*}(M) \leqq v_M. \tag{6}$$

On en déduit facilement

$$v(M) = \lim_{R\to 0} v_{S^*}(M), \tag{7}$$

égalité valable pour des potentiels dus à des masses de signe quelconque en tout point de détermination M. Il suffit de le montrer pour des masses positives. Or dans ce cas on le déduit de la semicontinuité inférieure, de l'identité fournie par un calcul direct

$$\int_{S^*} \varkappa_M(Q)\,dQ = 1$$

et du fait que la même intégrale étendue à la partie commune de S^* et de la sphère $r_Q \leqq \delta$ (δ un nombre positif arbitraire) tend vers 1 lorsque R tend vers 0. Ajoutons encore qu'il est à peu près évident que $v_{S^*}(M)$ croît lorsque le rayon R de la sphère décroît (*cf.* d'ailleurs les remarques du n° **24** sur les balayages successifs).

Cette valeur moyenne joue le même rôle pour les potentiels non-newtoniens que joue la valeur moyenne de Gauss

$$\frac{1}{S}\int_S v(Q)\,dS \tag{8}$$

pour le potentiel newtonien. La dernière intégrale est étendue à la surface de la sphère S de centre M, et nous avons désigné en même temps par S la surface totale de la sphère. Pour $\alpha = 2$ la valeur moyenne (4) devient à la limite identique à celle de Gauss (*cf.* le n° **16**).

22. Nous aurons besoin dans le dernier chapitre d'une extension d'un théorème de M. Evans[22]) concernant la fonction

[22]) C. G. Evans, Potentials of Positive Mass I, *Transactions American Math. Soc.,* **37** (1935), p. 226—253, spéc. p. 231.

limite d'une suite croissante de potentiels v_n dus à des masses positives. M. EVANS suppose que les masses sont portées par un ensemble fermé et *borné* F et trouve sous cette hypothèse que les potentiels v_n tendent vers un potentiel v dû à des masses positives portées par F, sauf dans le cas où ils tendent identiquement vers ∞. Nous aurons à nous placer dans des conditions un peu plus générales en admettant que les masses peuvent s'étendre à l'espace entier. On a le théorème suivant, valable pour tout exposant $0 < \alpha \leqq 2$.

Une suite croissante de potentiels $v_n(P)$ dus à des masses positives qui ne tend pas identiquement vers l'infini, tend vers une fonction de la forme $v(P)+c$ où $v(P)$ est encore un potentiel dû à des masses positives et c une constante $\geqq 0$.

La démonstration dans le cas non-newtonien est tout analogue à celle ayant rapport au cas classique, on n'aura qu'à remplacer la valeur moyenne de GAUSS par celle donnée par la formule (4). Quant au cas classique, le lecteur n'aura aucune difficulté à compléter la démonstration de M. EVANS en ce qui concerne la légère extension donnée ci-dessus.

23. Comme application de nos résultats sur le balayage nous examinerons la distribution de la masse de GREEN sur F lorsque M est un point très voisin d'un point frontière régulier Q' de F, en montrant que presque toute la masse se trouve au voisinage de Q'. La démonstration se base sur l'existence de potentiels auxiliaires convenables dus à des masses positives réparties sur F. La méthode du balayage nous fournira de tels potentiels.

Admettons un instant qu'on puisse former un potentiel $v(P)$ dû à des masses positives réparties sur F qui ait les propriétés suivantes. 1) $v(P)=1$ au point frontière régulier Q', 2) $v(P)$ est partout $\leqq 1$, 3) $v(P) < \varepsilon$ à l'extérieur d'une sphère S de centre Q' et de rayon R, ce rayon et le nombre ε étant très petits. Cela posé, on a par la formule (2) du n° **19**, en désignant par F_S le sous-ensemble de F contenu dans S,

$$v(M)=\int_F v(Q)\,d\mu_M(Q) \leqq \int_{F_S} d\mu_M(Q)+\varepsilon \int_{F-F_S} d\mu_M(Q)=$$
$$=\mu_M(F_S)+\varepsilon\mu_M(F-F_S) \leqq \mu_M(F_S)+\varepsilon,$$

où l'on a tenu compte des inégalités $\mu_M(F-F_S) \leqq \mu_M(F) \leqq 1$. Le point M étant voisin de Q', on aura à cause de la semicontinuité inférieure, $v(M) > v(Q') - \delta = 1 - \delta$, où δ est arbitrairement petit, et alors

$$1 \geqq \mu_M(F_S) > 1 - (\varepsilon + \delta)$$

et par suite

$$\mu_M(F - F_S) < \varepsilon + \delta.$$

Il reste à construire le potentiel auxiliaire $v(P)$. Soit s une sphère de centre Q' et de rayon $r < R$. Le potentiel d'équilibre $u(P)$ du volume sphérique s est très petit à l'extérieur de la sphère S si le rapport r/R est assez petit. En outre on a $u(Q') = 1$ et $u(P) \leqq 1$. Le balayage des masses de u sur F fournit maintenant un potentiel $v(P)$ qui remplit toutes les conditions posées. En résumé :

Si Q' est un point frontière régulier de l'ensemble F, la masse de Green μ_M qui se trouve dans un voisinage arbitrairement petit de Q' tend vers 1, *et la masse extérieure à ce voisinage tend vers* 0, *lorsque le point M tend d'une manière quelconque vers Q'. La réciproque est vraie.*

Le lecteur n'aura aucune difficulté à vérifier ce dernier énoncé en observant que ladite concentration de la masse de Green entraîne $\lim\limits_{P \to Q'} G_M(P) = 0$, pour toute position du pôle M, ce qui d'après le critère du n° **15** suffit pour assurer la régularité de Q'.

On peut préciser le théorème ci-dessus par l'énoncé suivant que nous donnons ici sans démonstration.

$V(P)$ étant un potentiel quelconque, on a avec les notations utilisées plus haut

$$\lim_{M \to Q'} \int_{F - F_S} V(Q)\, d\mu_M(Q) = 0.$$

24. Nous rassemblons ici quelques *remarques sur le cas newtonien* qui sont des conséquences faciles des faits indiqués à la fin du n° **18**.

M étant toujours un point d'un certain domaine connexe D adjacent à F, la formule (1) du n° **19** a lieu même dans le cas où les masses sont réparties sur l'ensemble (fermé) $\Omega - D$. Il en est de même de la formule (2) de ce numéro sous les conditions qu'on y trouve précisées.

Quant au balayage des masses, il ressort du calcul donné au n° **20** que si l'on ne balaye sur F que celles des masses qui se trouvent dans le domaine D, le potentiel est conservé en tout point de F'_D, c'est-à-dire en tout point régulier par rapport au domaine D[23]) (*cf.* le n° **18**).

Cela posé, il est facile de préciser les résultats du numéro précédent dans le cas newtonien. En effet, *ces résultats subsistent pour tout point Q' de F'_D.*[24]) Pour former le potentiel auxiliaire $v(P)$, on ne balaye sur F que celles des masses du potentiel d'équilibre de la sphère s qui se trouvent dans le domaine D. Le nouveau potentiel $v(P)$ a les mêmes propriétés essentielles que l'ancien sauf que ces masses sont réparties sur $\Omega - D$ au lieu de F. Alors, d'après ce qu'on vient de dire, on peut encore appliquer la formule (2) du n° **19**, et la démonstration s'achève comme plus haut.

25. Nous allons maintenant étudier de plus près la masse $\mu_M(e)$ portée par un sous-ensemble arbitraire e de F mesurable au sens de Borel. Soient $\overline{\overline{F}}$ un second ensemble fermé comprenant F, M un point extérieur à $\overline{\overline{F}}$. Il est presque évident qu'on peut trouver les masses de Green μ_M par rapport à F en formant d'abord les masses de Green $\overline{\overline{\mu}}_M$ par rapport à $\overline{\overline{F}}$ et en balayant ensuite sur F la partie de la masse portée par $\overline{\overline{F}} - F$. En effet le procédé en question conduit à des masses positives distribuées sur F dont le potentiel est égal à $r_{MQ}^{\alpha-m}$ en tout point Q de F à l'exception au plus d'un ensemble de capacité nulle. Or, comme on a vu plus haut, il n'y a que la distribution μ_M qui engendre un tel potentiel. Ayant recours à la formule (1), ce résultat peut s'écrire

$$\mu_M(e) = \overline{\overline{\mu}}_M(e) + \int_{\overline{\overline{F}}-F} \mu_Q(e)\, d\overline{\overline{\mu}}_M(Q). \tag{9}$$

Cela posé, soit M un point extérieur à F et décrivons une sphère s contenant le point M à son intérieur et assez petite pour qu'elle ne renferme aucun point de F. Comme ensemble $\overline{\overline{F}}$ on pourra alors prendre l'extérieur de cette sphère, frontière comprise. Les formules (2) et (3) du n° **16** mettent alors en évidence que $d\overline{\overline{\mu}}_M(Q)$ peut s'écrire $\lambda_M(Q)\,dQ$, où $\lambda_M(Q)$ est une fonction analytique et régulière de M. Par conséquent, il en est de même de $\mu_M(e)$. On voit aussi que dans le cas non newtonien tout sous-ensemble de F mesurable au sens de Borel et de mesure posi-

[23]) Cela a lieu aussi dans le cas général $0 < \alpha \leq 2$.

[24]) *Cf.* C. de la Vallée Poussin, *loc. cit.*, p. 183 et 203.

tive porte une masse positive. Dans le cas newtonien la masse $\bar{\bar{\mu}}_M$ est toute entière située sur la surface de s et alors $\bar{\bar{\mu}}_M(e)$ s'évanouit. Par dQ on entend alors l'élément d'aire de la sphère s et $\lambda_M(Q)$ devient le noyau classique de POISSON, manifestement harmonique en M. Il en est donc de même de la masse $\mu_M(e)$.[25])

Soit maintenant de nouveau α un exposant quelconque, $0 < \alpha \leqq 2$. Alors, M_0 et M étant deux points fixes, d'ailleurs arbitraires, d'un domaine connexe adjacent à F, il existe un nombre positif K, *indépendant du sous-ensemble e de F*, tel que l'on ait

$$\mu_M(e) \leqq K\mu_{M_0}(e). \tag{10}$$

Pour le voir, admettons d'abord qu'il existe une sphère s entourant les points M_0 et M et laissant F à son extérieur. Alors, avec les notations de tout à l'heure, l'inégalité en question pour les masses $\bar{\bar{\mu}}_{M_0}$ et $\bar{\bar{\mu}}_M$ s'établit par le même calcul qui donnait l'inégalité de HARNACK (n° **17**). Le passage aux masses μ_{M_0} et μ_M se fait alors par la formule (9). Pour M_0 et M arbitraires, on opère de proche en proche en intercalant un nombre fini de points auxiliaires.

Le résultat ci-dessus implique qu'il existe une fonction positive et bornée $\gamma_M(Q)$ telle que

$$\mu_M(e) = \int_e \gamma_M(Q)\, d\mu_{M_0}(Q).$$

La fonction $\gamma_M(Q)$ joue dans le cas général ($0 < \alpha \leqq 2$, F un ensemble fermé de capacité positive quelconque) le rôle du noyau de POISSON, l'intégrale de POISSON étant alors à former par rapport à la distribution de masses μ_{M_0}. P. ex. la formule (2) du n° **19** s'écrit pour tout point M appartenant au même domaine connexe adjacent que M_0

$$v(M) = \int_F v(Q)\,\gamma_M(Q)\, d\mu_{M_0}(Q).$$

Chapitre VIII. — Prolongement d'une fonction donnée sur un ensemble fermé.

26. Soit $f(Q)$ une fonction donnée sur l'ensemble F, et définissons pour les points M extérieurs à F un *prolongement* $\bar{f}(M)$ de f par la formule

---

[25]) *Cf.* C. DE LA VALLÉE POUSSIN, *loc. cit.*, p. 182 et 203.

$$(1') \qquad \bar{f}(M) = \int_F f(Q)\, d\mu_M(Q).$$

Pour que l'intégrale ait un sens, nous admettrons que la fonction donnée $f(Q)$ est mesurable au sens de BOREL et que $|f(Q)|$ est majoré par une fonction de la forme $v(Q)+c$, où v est un potentiel dû à des masses positives et c une constante positive. Dans le cas déjà considéré où $f(Q)$ est un potentiel engendré par des masses situées sur F et s'évanouissant sur la partie irrégulière F'' de F, $\bar{f}(M)$ sera, d'après la formule (2) du n° **19**, identique à ce potentiel à l'extérieur de F, $\bar{f}(M) = v(M)$. Plus généralement, si $f(Q)$ est le potentiel de masses situées n'importe où, sauf sur F'', $\bar{f}(M)$ ne sera, d'après la formule (3) du n° **20**, que le potentiel résultant du balayage de ces masses sur F, $\bar{f}(M) = \bar{v}(M)$. Enfin dans le cas où $f(Q) = 1$ dans un certain sous-ensemble e de F et $=0$ dans $F-e$, on a $\bar{f}(M) = \mu_M(e)$.

Pour ce qui suit, il sera commode de définir $\bar{f}$ aussi pour les points de F en y posant $\bar{f}(Q) = f(Q)$. Cela posé, on voit facilement que $\bar{f}$ est continu en tout point extérieur à F et en tout point régulier de F qui est en même temps point de continuité de f (n° **23**). Pour les points extérieurs on peut même dire davantage, savoir que $\bar{f}$ y est analytique et régulière (n° **25**).

Soit de nouveau $\bar{\bar{F}}$ un ensemble fermé comprenant notre ensemble F. La fonction $\bar{f}$ étant définie par ce qui précède sur tout l'ensemble $\bar{\bar{F}}$, on pourra en former le prolongement pour l'extérieur de $\bar{\bar{F}}$ par une formule analogue à (1) portant sur $\bar{\bar{F}}$. *Ce nouveau prolongement est identique au prolongement original dans tout l'extérieur de $\bar{\bar{F}}$.* En effet, cela découle immédiatement de la formule de composition pour les masses de GREEN correspondantes donnée au numéro précédent.

Nous indiquerons maintenant la démonstration d'un théorème d'unicité où il faut de nouveau exclure l'exposant newtonien $\alpha = 2$.

Si le prolongement d'une fonction f donnée sur un ensemble fermé F s'annule identiquement dans un domaine D de $\Omega - F$, ce prolongement s'annule identiquement dans tout $\Omega - F$ et la fonction donnée f est zéro presque partout[26]).

[26]) On sait que ce théorème est faux dans le cas newtonien. Le meilleur théorème de ce genre qui puisse être vrai c'est que, sous la condition posée, f s'annule presque partout par rapport à la masse de GREEN. Je n'ai réussi à démontrer ce théorème que dans le cas bien facile où f est continu (presque partout).

Ce théorème est déjà démontré au n° **11** dans le cas particulier où f est le potentiel d'une distribution de masses sur F. Pour démontrer le théorème donné ici, on peut, sans restreindre la généralité[27]), supposer que le domaine D embrasse l'extérieur d'une sphère de rayon très grand. L'ensemble F est alors borné et intérieur à une certaine sphère S de rayon R. On pourra, pour arriver au prolongement dans D, effectuer le prolongement dans S et le poursuivre ensuite dans l'extérieur de S. Par cela on aura réduit le théorème au cas où f est donné de prime abord à l'intérieur S^* d'une sphère S. On aura alors dans les notations des n^{os} **16** et **17** pour tout point M extérieur à S

$$\bar{f}(M) = \int_{S^*} f(Q)\, \lambda_M(Q)\, dQ,$$

cette intégrale s'annulant identiquement dans $\mathop{D}\limits_{\smile}$. D'où l'on voit par le raisonnement du n° **11** que tous les moments de $f(Q)\,(R^2 - r_Q^2)^{-\frac{\alpha}{2}}$ s'annulent.

27. Terminons ce chapitre par quelques indications sur le cas newtonien. Pour nous approcher de l'ordre d'idées habituel, nous admettons que l'ensemble fermé F ne contienne aucun point intérieur et que la fonction f donnée sur F soit continue. Soit alors D un domaine dont la frontière est constituée par F. Le prolongement de f est harmonique dans D (n° **25**), il est borné et il admet en vertu de la propriété de la masse de Green démontrée au n° **23**, comme valeurs limites les valeurs données f en tout point régulier de F (et selon le n° **24** même en tout point de F'_D)[28]). Alors il est évident d'après le théorème d'unicité de M. Vasilesco[29]) que notre prolongement est identique à la solution

---

[27]) En effet la correspondance donnée par la formule (1) est invariante par rapport à la transformation de Kelvin.

[28]) *Cf.* C. de la Vallée Poussin, *loc. cit.*, p. 184 et 205.

[29]) Le théorème de M. Vasilesco dit qu'une fonction qui est harmonique et bornée dans D et qui admet la valeur limite zéro en tout point frontière de D sauf au plus dans un ensemble de capacité nulle, s'annule identiquement dans D; *voir* F. Vasilesco, Sur la méthode du balayage de Poincaré, son extension par M. de la Vallée Poussin et le problème de Dirichlet généralisé, *Journal de Math.*, 14 (1935), p. 209—227 et (aussi pour une généralisation) O. Frostman, La méthode de variation de Gauss et les fonctions sousharmoniques, *ces Acta*, **8** (1937), p. 149—159, spéc. p. 158. Ajoutons que le théorème de M. Vasilesco subsiste, si l'on remplace l'en-

dans le sens de M. WIENER du problème de DIRICHLET pour le domaine D avec les valeurs limites f.

Chapitre IX. — Les suites bornées de potentiels et leurs applications au problème du prolongement et au problème de Dirichlet.

28. On a vu plus haut combien il est simple de caractériser, *sans recourir aux masses de* GREEN, le prolongement d'une fonction f donnée sur un ensemble fermé F dans le cas où f coïncide sur F avec un potentiel dont les masses sont situées sur F. En effet, sous des conditions très générales, il y aura alors coïncidence dans l'espace entier. Dans le chapitre suivant nous donnerons certaines conditions sous lesquelles une fonction peut s'écrire comme potentiel. On sait par la théorie classique que la continuité de la fonction ne suffit pas pour qu'une telle représentation soit possible même dans le cas où F est un ensemble très régulier, p. ex. la surface d'une sphère. Nous allons montrer ici que par les suites bornées de potentiels on arrive dans des cas très généraux au prolongement des fonctions et alors, en particulier dans le cas newtonien, à la solution du problème de Dirichlet généralisé.

Soient $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ des potentiels tels que $|v_n| \leqq c$, c étant une constante positive. Nous allons considérer les fonctions limites de telles suites bornées. Avant d'aborder le problème indiqué plus haut remarquons en passant que les potentiels de double couche de la théorie classique peuvent être écrits comme fonctions limites de cette espèce. A titre d'exemple considérons dans l'espace à trois dimensions la double couche de la densité $1/4\pi$ étalée sur la surface de la sphère unité. On sait que le potentiel correspondant est égal à 1, $1/2$, 0 à l'intérieur, sur la surface et à l'extérieur de la sphère. Étalons maintenant uniformément les masses respectives $1/2\varepsilon$ et $-1/2\varepsilon$ sur les sphères concentriques de rayons $1/(1+\varepsilon)$ et $1/(1-\varepsilon)$. Le potentiel de simple couche correspondant v_ε a la valeur 1 à l'intérieur de la première sphère et la valeur 0 à l'extérieur de la seconde. Entre les deux sphères on a

semble exceptionnel de capacité nulle par un ensemble qui est de mesure nulle par rapport à la masse de GREEN relative à la frontière de D et à un point arbitraire de D.

$$0 < v_\varepsilon = \frac{1}{2\varepsilon}\left[\frac{1}{r} - (1-\varepsilon)\right] < \frac{1}{2\varepsilon}\,[1+\varepsilon-(1-\varepsilon)] = 1$$

et en particulier sur la sphère de rayon 1, $v_\varepsilon = \frac{1}{2}$. La suite v_ε, majorée par la constante 1, admet donc bien comme fonction limite le potentiel de double couche en question.

Retournons maintenant à notre problème original et montrons que le prolongement de toute fonction *continue* f peut s'obtenir comme fonction limite d'une suite bornée de potentiels. Nous supposons encore pour simplifier que l'ensemble F soit borné. Soit alors f une fonction continue donnée sur cet ensemble. Nous construisons d'abord une suite bornée de potentiels, avec leurs masses sur F, qui tendent vers f en tout point régulier de F. Complétons à cet effet la fonction f de façon à obtenir une fonction continue définie dans l'espace entier qui s'annule dans la partie éloignée de l'espace. On peut évidemment trouver des fonctions f_n continues avec leurs dérivées des deux premiers ordres, s'annulant aussi identiquement à l'infini et tendant (uniformément) vers la fonction f dans l'espace entier et en particulier sur l'ensemble F. Ces fonctions f_n peuvent s'écrire (n° **10**)

$$f_n(P) = I^\alpha k_n(P),$$

la signification de $k_n(P)$ étant évidente. On aura donc en particulier pour les points P de F

$$f_n(P) = \int\limits_{\Omega} r_{PQ}^{\alpha-m} \frac{k_n(Q)}{H_m(\alpha)}\, dQ.$$

En balayant les masses sur F, on aura de nouveaux potentiels coïncidant avec les premiers en tout point régulier de F. Je dis que la nouvelle suite est encore bornée. En effet, les masses de f_n ayant une dérivée spatiale continue, ces masses s'évanouissent sur tout ensemble de capacité nulle et en particulier sur la partie irrégulière de F. Par conséquent le potentiel résultant du balayage sera donné par la formule (3) du n° **20** (en y remplaçant $v(Q)$ par $f_n(Q)$), ce qui met en évidence que toute borne de la première suite est en même temps une borne de la seconde.

Il est d'un certain intérêt de s'affranchir dans le résultat qui précède de l'hypothèse de continuité. Il suffit p. ex. que la fonction f puisse, sur l'ensemble F, être approchée par une suite bornée de fonctions f_n de la nature indiquée ou, ce qui revient au même, par une suite bornée de fonctions continues d'ailleurs quelconques[30]).

Nous allons montrer que les potentiels qu'on vient de construire admettent une fonction limite aussi en dehors de l'ensemble F et que cette fonction limite est précisément le prolongement de la fonction f. En effet, on peut énoncer à ce sujet le théorème suivant.

Soit $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ une suite bornée de potentiels dont les masses sont situées sur l'ensemble F. Si ces potentiels tendent vers une fonction f, sur tout l'ensemble F, sauf au plus sur un sous-ensemble de capacité nulle, ils tendent en dehors de F vers le prolongement $\bar{f}_F$ de f.

En effet, puisque les v_n sont bornés, leurs masses s'annulent d'après le n° **13** sur la partie irrégulière de F et on aura

$$v_n(M) = \int_F v_n(Q)\, d\mu_M(Q),$$

tandis que le prolongement de f est donné par la formule analogue

$$\bar{f}_F(M) = \int_F f(Q)\, d\mu_M(Q).$$

Puisque $f(Q) = \lim v_n(Q)$ sauf au plus dans un ensemble de capacité nulle, où la masse de Green s'annule, on n'aura qu'à intervertir l'ordre de l'intégration et du passage à la limite pour arriver à notre énoncé. Cette interversion est légitime, puisque les v_n sont bornés[31]) dans leur ensemble.

Voici un exemple pour illustrer ce résultat. Prenons comme ensemble F l'intérieur et la surface de la sphère unité et comme fonction f la fonction $=1$ à l'intérieur et $=0$ sur la surface. Cette fonction appartient à la classe de fonctions considérée tout

---

[30]) C'est-à-dire qu'il suffit que la fonction f soit bornée et qu'elle appartienne à la première classe de Baire. Tout à l'heure on trouvera une généralisation qui va beaucoup plus loin.

[31]) On peut outre les suites bornées de potentiels introduire la classe plus générale des *suites majorées de potentiels*, c'est-à-dire des suites v_n telles que $|v_n| \leqq V + C$, V étant un potentiel fixe dû à des masses positives et C une constante positive. L'intégrale $\int (V+C)\, d\mu_M$ étant toujours convergente, l'interversion effectuée dans le texte est, d'après un théorème bien connu de M. Lebesgue, toujours légitime pour les suites majorées convergentes.

à l'heure. Les suites bornées de potentiels avec leurs masses à l'intérieur et sur la surface de la sphère qui y tendent vers la fonction donnée tendent à l'extérieur vers le prolongement de cette fonction. Or ce prolongement est de caractère tout différent dans le cas newtonien et dans le cas non-newtonien. Dans le premier cas, ce prolongement donné par l'intégrale classique de POISSON pour l'extérieur de la sphère est identiquement zéro. Pour un exposant α non-newtonien, on obtient comme prolongement le potentiel d'équilibre d'ordre α de la sphère.

Indiquons encore succinctement la généralisation suivante, facile à démontrer. Toute fonction bornée f appartenant à l'une quelconque des classes de BAIRE, donnée sur l'ensemble F, peut être approchée par une suite bornée de potentiels dus à des masses portées par F, cela excepté au plus sur un sous-ensemble qui est de mesure nulle par rapport aux masses de GREEN. Toute suite pareille tend en dehors de F vers le prolongement de f.

Le seconde partie de notre énoncé est immédiate. Pour établir la première, observons d'abord que, d'après l'inégalité (10) du n° **25**, les ensembles de mesure nulle par rapport aux masses de GREEN μ_M sont les mêmes pour autant que le pôle M varie dans le même domaine connexe adjacent. Cela étant, on prend un point M_k dans chacun des domaines adjacents D_k et on forme la fonction additive d'ensemble $\mu = \Sigma a_k \mu_{M_k}$ avec des $a_k > 0$ et tels que la série Σa_k converge. La fonction f étant mesurable par rapport à la fonction d'ensemble μ, on sait former, tout comme s'il s'agissait de la mesure ordinaire, une suite bornée de fonctions continues tendant vers f sauf au plus sur un sous-ensemble de mesure nulle par rapport à μ et à plus forte raison par rapport aux masses de GREEN μ_{M_k}. Enfin on remplace les fonctions continues par des fonction f_n de la nature indiquée plus haut.

29. Nos résultats permettent aussi de donner une nouvelle solution du problème de DIRICHLET généralisé. Soit F un ensemble fermé et borné et f une fonction continue (ou une fonction appartenant à la classe considérée) définie sur cet ensemble. Cette fonction peut, sauf au plus sur un sous-ensemble de capacité nulle (la partie irrégulière de F), s'écrire comme fonction limite d'une suite bornée de potentiels newtoniens dont les masses sont situées sur F. D'autre part, toute suite bornée de potentiels newtoniens dus à des masses situées sur F qui tend vers la fonction

f en tout point de F, sauf au plus dans un sous-ensemble de capacité nulle, tend en dehors de F vers une fonction bien déterminée $\bar{f}_F$. Cette fonction est harmonique en tout domaine connexe adjacent à F et forme pour un tel domaine la solution du problème de Dirichlet, aux valeurs limites f, dans le sens de M. Wiener.

Chapitre X. — Le problème de Green et les fonctions surharmoniques.

30. Dans la théorie classique du potentiel, on désigne par problème de Green[32]) — appelé aussi problème de Gauss — le problème suivant, auquel nous avons déjà fait allusion tout à l'heure. Étant donné sur un certain nombre de domaines et de surfaces, désignés dans leur ensemble par A, une certaine fonction f, écrire cette fonction comme potentiel de masses portées par A. Ce problème est résoluble et se réduit à un nombre fini de problèmes de Dirichlet, si les surfaces données et celles formant les frontières des domaines donnés sont assez régulières et s'il en est de même de la fonction f, p. ex. si cette fonction admet un assez grand nombre de dérivées.

Dans le problème général on entendra par A un ensemble fermé arbitraire de capacité positive et on remplacera le potentiel newtonien par un potentiel d'ordre α quelconque, $0 < \alpha \leq 2$. Ce problème, nous l'avons envisagé dans le chapitre précédent pour des fonctions de caractère très régulier (les fonctions f_n). La méthode utilisée consiste à représenter la fonction par un potentiel avec des masses situées n'importe où et à balayer ensuite ces masses sur l'ensemble donné. Cette méthode peut encore s'appliquer à des cas plus généraux; nous n'insistons pas ici. Une autre méthode sera élucidée à la fin de ce chapitre par un problème particulier très simple. La plus grande partie du présent chapitre est consacrée au problème où les masses cherchées sont *positives*. Nous commençons par le cas où l'ensemble fermé A est identique à l'espace entier, et nous allons donner les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction f définie en tout point de l'espace puisse s'écrire comme *potentiel de masses positives*. Dans le

---

32) W. Thomson and P. G. Tait, *Treatise on Natural Philosophy*, II, Cambridge, 1883, p. 52.

n° **33** nous donnons la solution du problème correspondant pour un ensemble fermé quelconque.

31. Soit donc f une fonction, donnée dans l'espace entier, qu'il s'agit d'écrire comme potentiel de masses positives. *Une condition nécessaire, toujours admise dans la suite, est évidemment que la fonction f soit semicontinue inférieurement.* Pour obtenir d'autres conditions, on n'aura qu'à recourir à nos résultats sur le balayage de masses positives (n° **20**). Soient en effet F un ensemble fermé quelconque dont tous les points sont réguliers[33]) et M un point extérieur à cet ensemble. Alors, si f est un potentiel dû à des masses positives, le prolongement

$$\bar{f}_F(M) = \int_F f(Q)\, d\mu_M(Q) \tag{1}$$

devra satisfaire à l'inégalité

$$\bar{f}_F(M) \leqq f(M), \tag{2}$$

ce qui donne une nouvelle condition nécessaire. Remarquons que, grâce aux propriétés de la masse totale de GREEN, cette inégalité subsiste si f est une constante positive et alors aussi lorsque f est la somme d'un potentiel dû à des masses positives et d'une constante positive. Inversement on peut montrer que *si l'inégalité* (2) *a lieu pour tout ensemble F de l'espèce considérée et si la fonction f est semicontinue inférieurement, cette fonction peut, à une constante positive additive près, se mettre sous la forme d'un potentiel de masses positives.*

Les conditions données ici rappellent la définition des fonctions surharmoniques, due à M. F. RIESZ[34]). En effet, on a vu plus haut que dans le cas classique le prolongement de f n'est que la solution du problème de DIRICHLET (n° **27**).

Comme dans le cas classique, il est avantageux de remplacer notre condition (2) ayant rapport à des ensembles F généraux par une autre se rapportant à des ensembles très particuliers. On peut en effet démontrer (non sans quelque difficulté) que, la semicontinuité étant toujours admise, la condition (2) est entièrement équivalente à celles-ci

[33]) Il est commode pour simplifier les démonstrations de se restreindre à de tels ensembles. Nos énoncés restent valides, et même à plus forte raison, si l'on omet cette hypothèse restrictive.

[34]) F. RIESZ, Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel, *Acta Math.*, **48** (1926), p. 329—343 et **54** (1930), p. 321—360.

$$(2') \qquad f \geqq 0$$

et la condition (2) posée pour l'extérieur (surface comprise) S^* d'une sphère S quelconque de centre M et de rayon R très petit, c'est-à-dire que (*cf.* le n° **21**) la valeur moyenne

$$(2'') \qquad \bar{f}_{S^*}(M) = \int_{S^*} f(Q)\varkappa_M(Q)dQ \leqq f(M),$$

inégalité dont le premier membre est à remplacer dans le cas classique par la valeur moyenne de Gauss.

Nous appellerons les fonctions remplissant l'un ou l'autre de nos systèmes équivalents de conditions *fonctions surharmoniques d'ordre* α[35]), en supprimant le dernier attribut quand aucune confusion n'est à craindre. Parmi les propriétés presque évidentes de ces fonctions, nous nous contentons de signaler la suivante. *La fonction f étant surharmonique, il en est de même de la fonction définie par la valeur moyenne* (2″), S^* désignant l'extérieur d'une sphère variable, de rayon constant R, décrite autour du point variable M. Cette fonction qui ne dépend que du point M et du rayon R sera dans la suite désignée par $f_{(R)}(M)$. On montre comme pour les potentiels de masses positives (n° **21**) que $f_{(R)}(M)$ *tend en croissant vers $f(M)$ quand le rayon R tend en décroissant vers zéro.*

Ajoutons qu'on démontre à peu près comme dans le cas classique que f étant surharmonique dans notre sens, il en sera de même de $\bar{f}_F$.

Nous avons vu que $f_{(R)}(M)$ tend en croissant vers $f(M)$ lorsque le rayon R tend vers zéro. De la même manière on voit que $f_{(R)}(M)$ tend en décroissant vers une valeur $C \geqq 0$ quand R tend vers l'infini. On montre facilement que la valeur limite C est indépendante de la position du point M et que c'est précisément la constante additive entrant dans la représentation de notre fonction f.

On peut montrer que la fonction $f - C$ est encore positive et alors manifestement surharmonique. En désignant donc $f - C$ de nouveau par f, on aura obtenu une fonction dont la valeur moyenne tend vers zéro lorsque M tend vers l'infini. Or cette propriété appartient aussi à tout potentiel. On voit alors que le théorème

---

35) En réalité, on devrait parler de fonctions surharmoniques d'ordre α *dans l'espace entier.*

à démontrer est équivalent au suivant: Pour qu'une fonction puisse s'écrire comme potentiel de masses positives, il faut et il suffit qu'elle soit surharmonique et que sa valeur moyenne tende vers zéro quand le rayon R tend vers l'infini.

32. Nous allons maintenant indiquer la démonstration du fait que nos conditions sont suffisantes. Il s'agit d'abord d'améliorer la fonction donnée sous certains rapports, en sorte qu'on obtienne une fonction que l'on puisse facilement écrire sous la forme d'un potentiel d'ordre α. Une première opération, consistant dans la formation du prolongement de la fonction donnée par rapport à *l'intérieur* d'une sphère très grande, donne une fonction surharmonique d'ordre α qui à *l'extérieur* de cette sphère est analytique et régulière et s'annule avec ses dérivées à l'infini d'une manière convenable. A l'intérieur de la sphère, cette fonction est identique à la fonction donnée et on n'y peut donc rien dire de la dérivabilité de la fonction. Or, une seconde opération qui n'est qu'une espèce d'amélioration de l'opération (2″), appliquée à la nouvelle fonction, conduit à une fonction surharmonique d'ordre α qui dans l'espace entier est continue avec ses dérivées des deux premiers ordres et qui encore se comporte à l'infini d'une manière convenable. Cette fonction pourra donc s'écrire d'abord comme potentiel newtonien et ensuite comme potentiel d'ordre α. Grâce à la surharmonicité d'ordre α, ce dernier potentiel sera dû à des masses positives. Un passage à la limite itéré effectué sur des potentiels croissants dus à des masses positives conduit enfin à la fonction donnée qui d'après un théorème donné au n° **22** pourra elle-même, à une constante positive additive près, s'écrire comme potentiel de masses positives. On voit que la marche est bien analogue à celle suivie par M. F. Riesz dans l'une de ses démonstrations concernant le cas classique. Ne cachons pourtant pas qu'on a à surmonter des difficultés considérables.

En ce qui concerne les détails, nous devons nous contenter ici de quelques indications. La première opération signalée plus haut s'effectue par la formule (*cf.* le n° **16**)

$$\bar{f}_{S'}(M) = \int_{S'} f(Q)\, \lambda_M(Q)\, dQ, \tag{3}$$

où S' désigne *l'intérieur* d'une sphère décrite autour de l'origine O, dont on va faire tendre le rayon vers l'infini, et M signifie un point arbitraire à l'extérieur de cette sphère. Il est manifeste que dans le cas $\alpha=2$ le second membre se réduit à l'intégrale classique de POISSON formée pour l'extérieur de la sphère. On voit que la fonction $\overline{f_{S'}}$ est analytique et régulière à l'extérieur de la sphère, qu'elle s'annule à l'infini comme $r_{OM}^{\alpha-m}$ et que ses dérivées d'ordre k s'y annulent comme $r_{OM}^{\alpha-k-m}$. A l'intérieur et sur la surface on pose évidemment $\overline{f_{S'}}(M)=f(M)$. Nous appelons la fonction ainsi obtenue, qui est manifestement encore surharmonique (d'ordre α) une fonction *tronquée.* Ajoutons que *ces fonctions tendent en croissant vers la fonction donnée f quand le rayon de la sphère S' tend vers l'infini.*

La seconde opération, qui finalement sera appliquée à ces fonctions tronquées, consiste dans le procédé suivant que, pour simplifier l'écriture, on explique pour la fonction f. On forme, γ étant une constante positive arbitraire, une nouvelle moyenne $F_{(R)}(M)$ de la fonction $f_{(R)}(M)$ (définie par la formule (2″)) en posant

$$F_{(R)}(M)=\gamma\int_1^{\infty}\varrho^{-\gamma-1}(\varrho^2-1)^{\frac{\gamma}{2}-1}f_{(R\varrho)}(M)\,d\varrho. \tag{4}$$

Il est bien clair que la fonction $F_{(R)}(M)$ est encore *surharmonique et qu'elle tend en croissant vers $f(M)$ lorsque R tend vers zéro,* puisqu'il en est ainsi des fonctions $f_{(R\varrho)}(M)$. En désignant d'autre part par $S^*_{(R)}$ l'extérieur de la sphère de rayon R décrite autour de M, on trouve par un calcul simple la formule explicite

$$F_{(R)}(M)=\int_{S^*_{(R)}}f(Q)\,\sigma_M(Q)\,dQ, \tag{5}$$

avec

$$\sigma_M(Q)=C_{\alpha\gamma m}R^{\alpha}(r_{MQ}^2-R^2)^{\frac{\gamma-\alpha}{2}}r_{MQ}^{-\gamma-m}. \tag{6}$$

La valeur de la constante $C_{\alpha\gamma m}$, qui d'ailleurs joue un rôle peu important dans la suite, se calcule facilement si l'on observe que toute fonction constante se reproduit par nos opérations, ce qui implique que l'intégrale de $\sigma_M(Q)$ étendue à $S^*_{(R)}$ est $=1$. On en tire

$$C_{\alpha\gamma m}=\frac{\pi^{-\frac{m}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\gamma}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)}. \tag{7}$$

Remarquons en passant que d'après les dernières formules, $F_{(R)}(M)$ se réduit à $f_{(R)}(M)$ pour $\gamma=0$ et que, d'autre part, pour $\gamma>0$, la fonction $F_{(R)}(M)$ est bien définie aussi dans le cas classique et qu'elle peut alors aussi s'obtenir en remplaçant dans la formule (4) la fonction $f_{(R)}(M)$ par la valeur moyenne de Gauss.

Le point M étant fixé, le noyau $\sigma_M(Q)$ s'annule à l'infini, indépendamment de γ, comme $r_{MQ}^{-\alpha-m}$ et ses dérivées d'ordre k s'y annulent comme $r_{MQ}^{-\alpha-k-m}$. Pour *γ assez grand*, $\sigma_M(Q)$ et ses dérivées jusqu'à un certain ordre s'annulent encore sur la sphère $r_{MQ}=R$. Le noyau étant symétrique en M et en Q, on en conclut que $F_{(R)}(M)$ *possède des dérivées d'ordre arbitrairement donné* et que toutes les dérivations peuvent être exécutées sur $\sigma_M(Q)$ sous le signe $\int$, la variation avec M du domaine $S^*_{(R)}$ n'exerçant aucune influence sur l'expression de ces dérivées.

Nous posons maintenant les *conditions supplémentaires* que, pour M éloigné, la fonction donnée $f(M)$ possède elle-même des dérivées des deux premiers ordres et que la fonction, ses dérivées premières et son laplacien aient les ordres respectifs $O(r^{\alpha-m})$, $O(r^{\alpha-1-m})$ et $O(r^{\alpha-2-m})$, où r désigne la distance de M à l'origine. On démontre alors par un calcul assez laborieux, que nous devons omettre ici, que *la fonction $F_{(R)}(M)$, ses dérivées premières et son laplacien admettent les mêmes limitations.*

Ce point acquis, il est immédiat que si la fonction $f(M)$ surharmonique (d'ordre α) satisfait à nos conditions supplémentaires, la fonction $F_{(R)}(M)$ pourra, à un facteur constant près, s'écrire comme le potentiel newtonien absolument convergent de son laplacien. Donc, par le schéma donné aux n^{os} **10** et **28**, $F_{(R)}(M)$ pourra encore s'écrire comme potentiel d'ordre α absolument convergent d'une masse due à une fonction de densité continue. Grâce à la surharmonicité d'ordre α de $F_{(R)}(M)$ il est presque évident que cette fonction de densité est partout $\geqq 0$. En effet, si elle était négative en un point, elle le serait encore dans une petite sphère entourant ce point. En désignant par S^* l'extérieur de cette sphère, le prolongement de la fonction surharmonique $F_{(R)}$ par rapport à S^* aura à diminuer la fonction. Or ce prolongement, identique au potentiel obtenu par le balayage sur S^* des masses négatives intérieures à la petite sphère, augmenterait au sens strict la fonction $F_{(R)}$ au lieu de la diminuer. On arrive donc à une contradiction. En résumé, si la fonction surharmonique $f(M)$

satisfait aux conditions supplémentaires, $F_{(R)}(M)$ peut s'écrire comme potentiel de masses positives. En faisant tendre R vers zéro, $F_{(R)}$ tend en croissant vers f, par conséquent f peut encore s'écrire comme potentiel de masses positives[36].

Soit maintenant f une fonction surharmonique générale. Alors la fonction tronquée $\overline{f}_{S'}$ satisfait aux conditions supplémentaires, elle peut par conséquent s'écrire comme potentiel de masses positives. Ces fonctions tronquées tendent en croissant vers f lorsque le rayon de la sphère S' tend vers l'infini. Toute fonction surharmonique peut donc, à une constante positive additive près, s'écrire comme potentiel de masses positives.

33. Pour un *ensemble fermé* général A, il suffit d'indiquer la solution du problème suivant. Trouver les conditions dans lesquelles une fonction f donnée sur A peut, sur la partie régulière de A, à une constante positive additive près, s'écrire comme potentiel de masses positives portées par A. Il est clair que la positivité et la semicontinuité inférieure sont encore des conditions nécessaires. On peut alors former le prolongement de la fonction par rapport à l'ensemble A. Ce prolongement définit une fonction $\overline{f}_A$ en tout point extérieur à l'ensemble A. Nous posons aux points réguliers de A, $\overline{f}_A = f$, tandis que, en tout point irrégulier, nous définissons $\overline{f}_A$ comme la limite inférieure des valeurs de $\overline{f}_A$ admises au voisinage de ce point. Alors la condition nécessaire et suffisante pour que f puisse, sur la partie régulière de A et à une constante positive additive près, s'écrire comme potentiel de masses positives portées par A, est que la fonction $\overline{f}_A$ ainsi définie soit une fonction surharmonique.

34. La dernière méthode est évidemment applicable aussi dans le cas où l'on n'exige pas de masses positives. Cependant il paraît alors très difficile de donner des conditions effectives qui soient en même temps nécessaires et suffisantes. Au lieu d'insister sur cette question, nous donnons ici une solution explicite de caractère purement formel de notre problème dans le cas particulier où la dimension m de l'espace est $= 1$ et l'ensemble A se réduit à un intervalle. Ce problème et sa première solution

---

[36]) La constante additive s'annule puisque d'après la première condition supplémentaire, $f(M)$ tend vers zéro quand M tend vers l'infini.

sont dus à M. CARLEMAN[37]). Une solution différente fut donnée par M. ZEILON[38]).

On peut admettre que l'intervalle en question est limité par les points -1 et $+1$. Il faut donc résoudre l'équation

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(y)\,|x-y|^{\alpha-1}\,dy = f(x), \tag{8}$$

où $f(x)$ est donné dans l'intervalle $(-1, +1)$. On forme le prolongement de $f(x)$ pour les points extérieurs à cet intervalle

$$\bar{f}(x) = \int_{-1}^{+1} f(y)\,\lambda_x(y)\,dy, \tag{9}$$

avec (*voir* la formule (3) du n° **16**)

$$\lambda_x(y) = \pi^{-1} \sin \frac{\pi\alpha}{2}\,(x^2-1)^{\frac{\alpha}{2}}\,(1-y^2)^{-\frac{\alpha}{2}}\,|x-y|^{-1}. \tag{10}$$

En remplaçant pour $|x|>1$ la notation $\bar{f}(x)$ par $f(x)$, la formule (8) sera valable pour toute valeur de x. Or cette formule peut aussi s'écrire (formules (5) et (6) du n° **2**)

$$I^\alpha \varphi(x) = \frac{f(x)}{H_1(\alpha)},$$

avec

$$H_1(\alpha) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}\,2^\alpha\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}.$$

Il vient par la formule (7) du même numéro

$$-\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \varphi(y)\,|x-y|\,dy = I^2\varphi(x) = I^{2-\alpha}\left(I^\alpha \varphi(x)\right) =$$

$$= \frac{1}{H_1(2-\alpha)\,H_1(\alpha)} \int_{-\infty}^{+\infty} |x-y|^{1-\alpha} f(y)\,dy = g(x),$$

et alors

$$\varphi(x) = -g''(x).$$

Il y a pourtant ici une difficulté qu'on ne peut pas passer

---

37) T. CARLEMAN, Über die Abelsche Integralgleichung mit konstanten Integrationsgrenzen, *Math. Zeitschrift*, **15** (1922), p. 111—120.

38) N. ZEILON, Sur quelques points de la théorie de l'équation intégrale d'Abel, *Arkiv för Mat.*, **18** (1924), n° **5**, p. 1—19.

sous silence, c'est que la dernière intégrale diverge en général[39]. En effet, la fonction $f(x)\,(=\overline{f}(x))$ est dans le cas général du même ordre de grandeur que $|x|^{\alpha-1}$. On peut remédier à cet inconvénient en définissant l'intégrale $I^{2-\alpha}f(x)$ au moyen du prolongement analytique par rapport à l'exposant. Cela peut s'effectuer de beaucoup de manières, en voici une. La fonction $f(x)\,(=\overline{f}(x))$ définie par la formule (9) peut s'écrire pour $|x|>1$

$$f(x)=A|x|^{\alpha-1}+Bx|x|^{\alpha-3}+O(|x|^{\alpha-3}),$$

A et B étant à des facteurs numériques près les moments d'ordres zéro et un de $f(x)(1-x^2)^{-\frac{\alpha}{2}}$ par rapport à l'intervalle $(-1,+1)$. Soit alors $\varkappa(x)=a+bx$ et posons

$$k(x)=\int_{-1}^{+1}\varkappa(y)\,|x-y|^{\alpha-1}\,dy.$$

On peut déterminer les constantes a et b de sorte que les moments d'ordres zéro et un de $k(x)\,(1-x^2)^{-\frac{\alpha}{2}}$ soient identiques à ceux de $f(x)(1-x^2)^{-\frac{\alpha}{2}}$. En posant alors pour $|x|>1$, avec une notation évidente, $k(x)=\overline{k}(x)$, on aura la formule définitive

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\varphi(y)\,|x-y|\,dy=\frac{-1}{H_1(\alpha)\,H_1(2-\alpha)}\int_{-\infty}^{+\infty}(f(y)-k(y))\,|x-y|^{1-\alpha}\,dy+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\varkappa(y)\,|x-y|\,dy.$$

Notre méthode s'applique pour $0<\alpha<2$, excepté pour $\alpha=1$, où le problème n'admet pas de solution sauf dans le cas banal où la fonction $f(x)$ est constante. Pour arriver à un problème naturel correspondant à $\alpha=1$, il faut le poser pour le potentiel logarithmique (*cf.* le n° **3**), problème qui est facile à résoudre.

(Reçu le 26 août 1937)

---

[39]) Cette difficulté dérive du fait que la formule (7) du n° **2** n'est valable en général que pour $\alpha+\beta<m$. Or on l'applique ici pour $m=1$ et $\alpha+\beta=2$. On voit que la difficulté n'intervient que pour $m=1$ et $m=2$ et que, en résolvant le même problème pour un volume sphérique, on aura convergence dès que la dimension de l'espace est $\geqq 3$.